

Einheitsvektoren

Was ist ein Einheitsvektor?

Teile einen Vektor einfach durch seine Länge. Das Ergebnis ist ein Vektor der Länge 1, ein **Einheitsvektor**.
Einheitsvektoren werden mit einer 0 als Index gekennzeichnet.

Rechenbeispiel:

Bilde zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ einen Einheitsvektor.

Lösung:

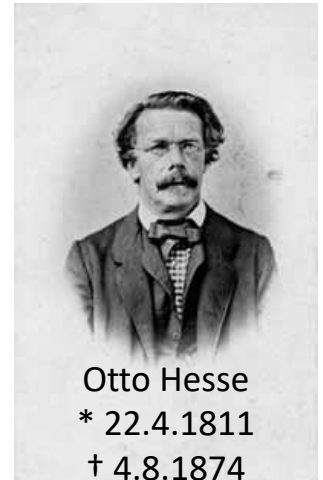
$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \underline{\vec{v}_0} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}}$$

Hesse'sche Normalenform

Wenn man in der Normalenform einen **Einheitsnormalenvektor** verwendet, bekommt man die Hesse'sche Normalenform (HNF):

$$\text{HNF} \quad E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

Dabei ist $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ ein Einheitsnormalenvektor.



(Quelle: Wikipedia)

Wofür braucht man dies?

Unter Verwendung der HNF kann später der Abstand eines Punktes zu einer Ebene sehr bequem berechnet werden!

Rechenbeispiel

Die Ebene E sei gegeben durch $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$.

Wie lautet die entsprechende Hesse'sche Normalen Form der Ebene E ?

Lösung

In E : $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$ liest man zunächst den Normalenvektor mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ab.

Mit $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$ folgt $\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Nun suchen wir uns einen beliebigen Punkt P , der in E liegt, den wir dann als Stützvektor verwenden können.

Dazu setzen wir zwei beliebige Koordinaten der Ebenengleichung gleich Null und berechnen die dritte Koordinate.

$$E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$$
$$\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung

Beispielsweise setzen wir $x_1 = x_2 = 0$ und erhalten $x_3 = -2$.
Somit liegt $P(0|0|-2)$ in E und wir erhalten folgendes

Ergebnis:

Die HNF für E lautet $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

HNF in Koordinatenschreibweise

Die **Hesse'sche Normalenform (HNF)** einer Ebene kann auch in Koordinatenschreibweise notiert werden.

In der Koordinatenform $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ziehe d auf beiden Seiten ab und teile anschließend durch die Länge des Normalenvektors:

$$\text{HNF E: } \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

Dies ist die HNF in Koordinatenschreibweise.

Rechenbeispiel

Wandle $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$ um in die Hesse'sche Normalenform (Koordinatenschreibweise).

Lösung:

Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$. Daraus erhalten wir direkt die HNF.

Ergebnis: HNF $E: \frac{x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4}{3} = 0$.